

Primal-Dual Active Set Strategy per problemi di controllo ottimo

Luca Mechelli

Universität Konstanz

Pisa, 20 Febbraio 2018

- 1 Il Modello
- 2 Condizioni necessarie di ottimalità del primo ordine
- 3 Primal-Dual Active Set Strategy
- 4 Soluzione Numerica: Metodo degli elementi finiti ed Eulero implicito
- 5 Test numerici

Il modello: equazione di diffusione-trasporto

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto e limitato, con bordo $\Gamma = \Gamma_c \cup \Gamma_o$ e $\Gamma_c \cap \Gamma_o = \emptyset$, allora dati $T > 0$ orizzonte temporale, $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathcal{U} := L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ e $b_i : \Gamma_c \rightarrow \mathbb{R}$ control shape functions, la temperatura y soddisfa la seguente *equazione di stato*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t}(t, \mathbf{x}) &= \lambda \Delta y(t, \mathbf{x}) - v(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla y(t, \mathbf{x}) && \text{in } Q := (0, T) \times \Omega \\ \lambda \frac{\partial y}{\partial n}(t, \mathbf{s}) + \gamma_c y(t, \mathbf{s}) &= \gamma_c \sum_{i=1}^m u_i(t) b_i(\mathbf{s}) && \text{su } \Sigma_c := (0, T) \times \Gamma_c \\ \lambda \frac{\partial y}{\partial n}(t, \mathbf{s}) + \gamma_o y(t, \mathbf{s}) &= \gamma_o y_{out}(t) && \text{su } \Sigma_o := (0, T) \times \Gamma_o \\ y(0, \mathbf{x}) &= y_o(\mathbf{x}) && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

dove $\gamma_c, \lambda > 0$, $\gamma_o \geq 0$, $v \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d))$, $y_{out} \in L^2(0, T)$, $y_o \in L^2(\Omega)$ e $b_1, \dots, b_m \in L^\infty(\Gamma_c)$.

Formulazione debole

Siano $H := L^2(\Omega)$ e $V := H^1(\Omega)$, per ogni $\varphi, \psi \in V$ definiamo:

1. $a(t; \cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare dipendente dal tempo e non simmetrica:

$$a(t; \varphi, \psi) = \int_{\Omega} \lambda \nabla \varphi \nabla \psi + v(t) \cdot \nabla \varphi \psi dx + \gamma_c \int_{\Gamma_c} \varphi \psi ds + \gamma_o \int_{\Gamma_o} \varphi \psi ds$$

2. $\mathcal{F}(t) \in V^*$ funzionale lineare tale che

$$\langle \mathcal{F}(t), \varphi \rangle_{V^*, V} = \gamma_o y_{out}(t) \int_{\Gamma_o} \varphi ds$$

3. $\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \rightarrow V^*$ operatore lineare definito come

$$\langle \mathcal{B}u, \varphi \rangle_{V^*, V} = \sum_{i=1}^m u_i \int_{\Gamma_c} b_i \varphi ds$$

dato $u = (u_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}^m$.

Definizione

$y \in W(0, T) = \{\varphi \in L^2(0, T; V) \mid \varphi_t \in L^2(0, T; V^*)\}$ è detta soluzione debole se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle y(t), \varphi \rangle_H + a(t; y(t), \varphi) &= \langle \mathcal{F}(t) + \gamma_c \mathcal{B}(u(t)), \varphi \rangle_{V^*, V} && \forall \varphi \in V \text{ q.o. in } (0, T] \\ y(0) &= y_o && \text{in } H \end{aligned}$$

Esistenza ed unicità della soluzione debole

Osservazione

$W(0, T) = \{\varphi \in L^2(0, T; V) \mid \varphi_t \in L^2(0, T; V^*)\}$ è uno spazio di Banach con norma $\|\varphi\|_{W(0, T)}^2 := \|\varphi\|_{L^2(0, T; V)}^2 + \|\varphi_t\|_{L^2(0, T; V^*)}^2$ e dotato del prodotto scalare $\langle \varphi, \psi \rangle_{W(0, T)} := \int_0^T \langle \varphi(t), \psi(t) \rangle_V dt + \int_0^T \langle \varphi_t(t), \psi_t(t) \rangle_{V^*} dt$ è uno spazio di Hilbert.

Lemma

Supponendo che le precedenti ipotesi siano soddisfatte, allora:

1) Per quasi tutti gli $t \in [0, T]$ la forma bilineare soddisfa

$$\begin{aligned} |a(t; \varphi, \psi)| &\leq \alpha \|\varphi\|_V \|\psi\|_V && \forall \varphi, \psi \in V, \\ a(t; \varphi, \varphi) &\geq \alpha_1 \|\varphi\|_V^2 - \alpha_2 \|\varphi\|_H^2 && \forall \varphi \in V \end{aligned}$$

con costanti $\alpha, \alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 \geq 0$.

2) Abbiamo $\mathcal{F} \in L^2(0, T; V^*)$ e l'operatore lineare \mathcal{B} è limitato.

Teorema

Supponendo che le precedenti ipotesi siano soddisfatte, allora esiste un'unica soluzione debole $y \in W(0, T)$ per ogni $u \in \mathcal{U}$. Inoltre, y soddisfa

$$\|y\|_{W(0, T)} \leq c_y (\|y_o\|_H + \|y_{out}\|_{L^2(0, T)} + \|u\|_{\mathcal{U}})$$

con $c_y \geq 0$ costante ed indipendente da y_o, y_{out} e u .

Il problema di controllo ottimo

Dati $u_a = (u_i^a)_{1 \leq i \leq m}$, $u_b = (u_i^b)_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}^m$ vincoli sul controllo, definiamo l'insieme dei controlli ammissibili:

$$\mathcal{U}_{\text{ad}} = \{u \in \mathcal{U} \mid u_i^a \leq u_i(t) \leq u_i^b, \text{ per } i = 1, \dots, m \text{ e q.o. in } [0, T]\}$$

Dati due target $y_Q \in L^2(0, T; H)$ e $y_T \in H$, siamo interessati a minimizzare il seguente funzionale di costo quadratico:

$$J(y, u) = \frac{\sigma_Q}{2} \int_0^T \|y(t) - y_Q(t)\|_H^2 dt + \frac{\sigma_T}{2} \|y(T) - y_T\|_H^2 + \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{L^2(0, T)}^2$$

con $\sigma_Q, \sigma_T \geq 0$ e $\sigma > 0$. Il problema di controllo ottimo può essere riassunto nel seguente modo:

$$\min_{(y, u) \in X} J(y, u) \quad (\mathbf{P})$$

con $X = \{(y, u) \in W(0, T) \times \mathcal{U} \mid y \text{ soluzione debole dell' eq. di stato, } u \in \mathcal{U}_{\text{ad}}\}$

Formulazione generale

Il precedente problema di controllo ottimo (**P**) appartiene ad una classe generale di problemi non lineari del seguente tipo:

$$\min_{y \in Y, u \in \mathcal{U}} J(y, u) \text{ con } e(y, u) = 0, u \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \quad (\mathcal{P})$$

con $J : Y \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $e : Y \times \mathcal{U} \rightarrow Z$ operatori continui, $\mathcal{U}_{\text{ad}} \subset \mathcal{U}$, Z spazio di Banach e \mathcal{U}, Y spazi di Banach riflessivi (nel caso lineare-quadratico non serve che Y sia riflessivo).

Teorema

Se sono soddisfatte le seguenti ipotesi:

1. $\mathcal{U}_{\text{ad}} \subset \mathcal{U}$ è convesso, limitato e chiuso,
 2. L'equazione di stato $e(y, u) = 0$ possiede per ogni $u \in \mathcal{U}$ un'unica soluzione $y(u) \in Y$, quindi possiede un operatore di soluzione $u \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \rightarrow y(u) \in Y$,
 3. Tale operatore di soluzione è limitato,
 4. $(y, u) \in Y \times \mathcal{U} \rightarrow e(y, u) \in Z$ è debolmente continuo,
 5. J è sequenzialmente debolmente semicontinuo inferiormente,
- allora esiste (\bar{y}, \bar{u}) soluzione ottimale di (**P**).

Osservazione

Per il precedente teorema, esiste (\bar{y}, \bar{u}) soluzione ottimale di (**P**). Essendo il funzionale di costo $J(y(u), u)$ strettamente convesso nella variabile u , tale soluzione è unica.

M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich, *Optimization with PDE constraints*, Springer (2009)

F. Tröltzsch, *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications*, American Mathematical Society (2010)

Il problema ridotto

Il problema (\mathcal{P}) può essere formulato come un problema di ottimizzazione nella sola variabile u . Se infatti l'equazione di stato $e(y, u) = 0$ possiede per ogni $u \in U$ un'unica soluzione $y(u) \in Y$, inserendo $y(u)$ in (\mathcal{P}) otteniamo il problema ridotto:

$$\min_{u \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} \hat{J}(u) := J(y(u), u) \quad (\hat{\mathcal{P}})$$

Per il nostro problema (\mathbf{P}) , possiamo suddividere la soluzione in due parti $y = \hat{y} + \mathcal{S}u$, dove $\mathcal{S} : \mathcal{U} \rightarrow W_0(0, T) = \{\varphi \in W(0, T) \mid \varphi(0) = 0 \in H\}$ è l'operatore lineare di soluzione tale che $y = \mathcal{S}u \in W_0(0, T)$ risolve:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle y(t), \varphi \rangle_H + a(t; y(t), \varphi) &= \langle \gamma_c \mathcal{B}(u(t)), \varphi \rangle_{V^*, V} & \forall \varphi \in V \text{ q.o. in } (0, T] \\ y(0) &= 0 & \text{in } H \end{aligned}$$

e definendo $\hat{y}_Q = y_Q - \hat{y}$ e $\hat{y}_T = y_T - \hat{y}$, otteniamo il problema ridotto per (\mathbf{P}) :

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} \hat{J}(u) := J(\hat{y} + \mathcal{S}u, u) &= \frac{\sigma_Q}{2} \int_0^T \|(\mathcal{S}u)(t) - \hat{y}_Q\|_H^2 \\ &+ \frac{\sigma_T}{2} \|(\mathcal{S}u)(T) - \hat{y}_T\|_H^2 + \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{L^2(0, T)}^2 \end{aligned} \quad (\hat{\mathbf{P}})$$

Osservazione

Per quanto osservato precedentemente, il problema ridotto $(\hat{\mathbf{P}})$ ammette un'unica soluzione ottimale $\bar{u} \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$. Sia $\bar{y} = \hat{y} + \mathcal{S}\bar{u}$ allora (\bar{y}, \bar{u}) è soluzione ottimale per (\mathbf{P}) .

2 Condizioni necessarie di ottimalità del primo ordine

1 Il Modello

2 Condizioni necessarie di ottimalità del primo ordine

3 Primal-Dual Active Set Strategy

4 Soluzione Numerica: Metodo degli elementi finiti ed Eulero implicito

5 Test numerici

Differenziabilità secondo Gateaux e secondo Frechet

Definizione

Sia $F : U \subset X \rightarrow Y$ un operatore con X e Y spazi di Banach e U aperto non vuoto.

- F ammette derivata direzionale in $x \in U$ se per ogni $h \in X$ esiste il limite

$$dF(x, h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} \in Y$$

In questo caso $dF(x, h)$ è chiamata derivata direzionale di F nella direzione h .

- F è detta differenziabile secondo Gateaux (G-differenziabile) in $x \in U$ se F ammette derivata direzionale in x e la derivata direzionale $F'(x) : X \ni h \rightarrow dF(x, h) \in Y$ è limitata e lineare, cioè $F'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$.
- F è detta differenziabile secondo Frechet (F-differenziabile) in $x \in U$ se F è G-differenziabile in x e se la seguente condizione di approssimazione è soddisfatta:

$$\|F(x + h) - F(x) - F'(x)h\|_Y = o(\|h\|_X) \text{ per } \|h\|_X \rightarrow 0$$

- Se F è G-/F-differenziabile per ogni $x \in V$, $V \subset U$ aperto, allora F è detta G-/F-differenziabile in V .

Osservazione (Derivate di ordine maggiore)

Se F è G-/F-differenziabile in un intorno V di x e $F' : V \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ è essa stessa G-/F-differenziabile, allora F è detta due volte G-/F-differenziabile in x . Indicheremo la G-/F-derivata seconda in x con $F''(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ e così via.

Proprietà di operatori G-/F-differenziabili

1. Sia $H(x) = G(F(x))$ con F, G F-differenziabili rispettivamente in x e $F(x)$ allora H è F-differenziabile in x con $H'(x) = G'(F(x))F'(x)$. Inoltre, se F è G-differenziabile in x e G è F-differenziabile in $F(x)$, allora H è G-differenziabile e vale la regola precedente. Come conseguenza, anche la regola di derivazione per la somma di operatori G-/F-differenziabili è valida.
2. Se F è G-differenziabile in un intorno di x e F' è continua in x allora F è F-differenziabile in x .
3. Se $F : X \times Y \rightarrow Z$ è F-differenziabile in (x, y) allora $F(\cdot, y)$ e $F(x, \cdot)$ sono F-differenziabili rispettivamente in x e y . Queste derivate sono chiamate derivate parziali e verranno indicate rispettivamente con $F_x(x, y)$ e $F_y(x, y)$. Dato che F è F-differenziabile si ha:

$$F'(x, y)(h_x, h_y) = F_x(x, y)h_x + F_y(x, y)h_y$$

Derivata prima del funzionale di costo ridotto \hat{J} in $(\hat{\mathcal{P}})$

Assumiamo che J e e in (\mathcal{P}) siano funzionali continui F-differenziabili. Supponiamo, inoltre, che $e_y(y(u), u) \in \mathcal{L}(Y, Z)$ sia continuo ed invertibile con inverso limitato, allora per il teorema della funzione implicita abbiamo che $y(u)$ è differenziabile con derivata $y'(u)$.

Derivando $e(y(u), u)$ rispetto ad u otteniamo:

$$e_y(y(u), u)y'(u) + e_u(y(u), u) = 0 \quad (1)$$

Siamo ora interessati a calcolare \hat{J}' : per $u \in \mathcal{U}$ e una direzione $s \in \mathcal{U}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} d\hat{J}(u, s) &= \langle \hat{J}'(u), s \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}} = \langle J_y(y(u), u), y'(u)s \rangle_{Y^*, Y} + \langle J_u(y(u), u), s \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}} \\ &= \langle y'(u)^* J_y(y(u), u), s \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}} + \langle J_u(y(u), u), s \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}} \end{aligned}$$

per cui

$$\hat{J}'(u) = y'(u)^* J_y(y(u), u) + J_u(y(u), u)$$

Possiamo osservare che non è richiesto l'operatore $y'(u) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, Y)$, ma solamente il vettore $y'(u)^* J_y(y(u), u) \in \mathcal{U}^*$. Da (1) ricaviamo che

$$y'(u)^* J_y(y(u), u) = -e_u(y(u), u)^* e_y(y(u), u)^{-*} J_y(y(u), u)$$

quindi

$$y'(u)^* J_y(y(u), u) = e_u(y(u), u)^* p(u)$$

dove $p = p(u) \in Z^*$ **variabile aggiunta** risolve l' **equazione aggiunta**

$$e_y(y(u), u)^* p = -J_y(y(u), u)$$

Riassumendo \hat{J}' può essere calcolata:

- Risolvendo l'equazione aggiunta:

$$e_y(y(u), u)^* p = -J_y(y(u), u)$$

- Applicando la formula:

$$\hat{J}'(u) = e_u(y(u), u)^* p(u) + J_u(y(u), u)$$

Osservazione (Formulazione Lagrangiana)

La rappresentazione di \hat{J}' tramite la variabile aggiunta può essere derivata anche in modo differente. Consideriamo (\mathcal{P}) e definiamo la Lagrangiana $L : Y \times \mathcal{U} \times Z^* \rightarrow \mathbb{R}$:

$$L(y, u, p) = J(y, u) + \langle p, e(y, u) \rangle_{Z^*, Z}$$

Inserendo $y = y(u)$ dato per un $p \in Z^*$ arbitrario abbiamo:

$$\hat{J}'(u) = J(y(u), u) = J(y(u), u) + \langle p, e(y(u), u) \rangle_{Z^*, Z} = L(y(u), u, p)$$

Derivando:

$$\langle \hat{J}'(u), s \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}} = \langle L_y(y(u), u, p), y'(u)s \rangle_{Y^*, Y} + \langle L_u(y(u), u, p), s \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}}$$

Sia $p = p(u)$ tale che $L_y(y(u), u, p) = 0$, ovvero p risolve l'equazione aggiunta, abbiamo che

$$\hat{J}'(u) = L_u(y(u), u, p(u)) = e_u(y(u), u)^* p(u) + J_u(y(u), u)$$

Condizione di ottimalità generale

Teorema

Sotto le precedenti ipotesi, se \hat{u} è una soluzione locale del problema ridotto ($\hat{\mathcal{P}}$) allora \hat{u} soddisfa la disuguaglianza variazionale

$$\hat{u} \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \quad \text{e} \quad \langle \hat{J}'(\hat{u}), u - \hat{u} \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}} \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$$

Corollario

Sia (\bar{y}, \bar{u}) una soluzione ottimale per (\mathcal{P}) e siano le precedenti ipotesi soddisfatte. Allora esiste un unico moltiplicatore di Lagrange (o variabile aggiunta) $\bar{p} \in Z^*$ tale che le seguenti condizioni di ottimalità sono verificate:

$$\begin{aligned} e(\bar{y}, \bar{u}) &= 0 \\ e_y(\bar{y}, \bar{u})^* \bar{p} &= -J_y(\bar{y}, \bar{u}) \\ \bar{u} \in \mathcal{U}_{\text{ad}}, \quad \langle J_u(\bar{y}, \bar{u}) + e_u(\bar{y}, \bar{u})^* \bar{p}, u - \bar{u} \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}} &\geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \end{aligned} \tag{2}$$

o equivalentemente usando la formulazione lagrangiana:

$$\begin{aligned} L_p(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) &= e(\bar{y}, \bar{u}) = 0 \\ L_y(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}) &= 0 \\ \bar{u} \in \mathcal{U}_{\text{ad}}, \quad \langle L_u(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p}), u - \bar{u} \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}} &\geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \end{aligned} \tag{3}$$

Condizioni di ottimalità per (P)

La formulazione debole dell'equazione di stato definisce il seguente operatore lineare limitato:

$$e : (y, u) \in W(0, T) \times \mathcal{U} \rightarrow (Ay + Bu - \mathcal{F}, y(0) - y_0) \in L^2(0, T; V^*) \times H$$

Inoltre, $e_y(y, u) \in \mathcal{L}(W(0, T), L^2(0, T; V^*) \times H)$, $e_y(y, u)v = (Av, v(0))$ ha inversa limitata. Inoltre, usando il fatto che $W(0, T)$ è immerso in $C([0, T]; H)$, il funzionale di costo J è ovviamente continuo e F-differenziabile. Le ipotesi del precedente teorema sono, quindi, soddisfatte allora (\bar{y}, \bar{u}) soluzione ottimale di (P) soddisfa le condizioni di ottimalità (3), dove la Lagrangiana è:

$$\begin{aligned} L(y, u, p, q) = & \int_0^T \langle y_t(t), p(t) \rangle_{V^*, V} + a(t; y(t), p(t)) - \langle \mathcal{F}(t), p(t) \rangle_{V^*, V} dt \\ & - \int_0^T \gamma_c \langle \mathcal{B}(u(t)), p(t) \rangle_{V^*, V} dt + \langle y(0) - y_0, q \rangle_H + J(y, u) \end{aligned}$$

Sistema di ottimalità per (P)

Teorema

Se (\bar{y}, \bar{u}) è una soluzione ottimale di (P) allora esistono unici moltiplicatori di Lagrange $\bar{p} \in W(0, T)$ e $\bar{\mu} \in \mathcal{U}$ che soddisfano:

1. L'equazione aggiunta (o duale)

$$-\frac{d}{dt} \langle \bar{p}(t), \varphi \rangle_H + a(t; \varphi, \bar{p}(t)) = \sigma_Q \langle (y_Q - \bar{y})(t), \varphi \rangle_H \quad \forall \varphi \in V, \quad (4)$$

$$\bar{p}(T) = \sigma_T (y_T - \bar{y}(T)) \text{ in } H$$

q.o. in $[0, T]$

2. Il sistema di ottimalità

$$0 = \bar{\mu}_i + \sigma \bar{u}_i - \gamma_c \int_{\Gamma_c} b_i \bar{p} ds \quad (5)$$

$$\bar{\mu}_i = \max \{0, \bar{\mu}_i + \eta_i (\bar{u}_i - u_i^b)\} + \min \{0, \bar{\mu}_i + \eta_i (\bar{u}_i - u_i^a)\}$$

con $\eta_1, \dots, \eta_m > 0$ scelti arbitrariamente. Gli operatori max e min sono interpretati componente per componente in senso puntuale.

N.B.: Analogamente a quanto fatto per l'equazione di stato, introduciamo uno splitting della soluzione dell'equazione aggiunta $p = \hat{p} + \tilde{S}u$.

Active ed Inactive sets + Metodo di Newton generalizzato

Il precedente sistema di ottimalità (5) può essere riformulato nel seguente modo:

$$\text{trovare } u \text{ tale che } \mathcal{H}_i(u) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (6)$$

con gli operatori $\mathcal{H}_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$:

$$\mathcal{H}_i(u) = \gamma_c \int_{\Gamma_c} b_i p(u) ds - \sigma u_i - \max \{0, \gamma_c \int_{\Gamma_c} b_i p(u) ds - \sigma u_i^b\} - \min \{0, \gamma_c \int_{\Gamma_c} b_i p(u) ds - \sigma u_i^a\}$$

Risulta naturale definire i seguenti insiemi (chiamati Active Sets):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i^a(u) &= \{t \in [0, T] \mid \gamma_c \int_{\Gamma_c} b_i \bar{p} ds - \sigma u_i^a < 0 \text{ a.e.}\}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \mathcal{A}_i^b(u) &= \{t \in [0, T] \mid \gamma_c \int_{\Gamma_c} b_i \bar{p} ds - \sigma u_i^b > 0 \text{ a.e.}\}, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (7)$$

ed il corrispettivo Inactive Set

$$\mathcal{I}_i(u) = [0, T] \setminus (\mathcal{A}_i^a(u) \cup \mathcal{A}_i^b(u)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (8)$$

Successivamente, applichiamo il metodo di Newton generalizzato alle equazioni operatoriali definite in (6). All'iterazione k -esima del metodo abbiamo che:

$$d\mathcal{H}_i(u^k, u^\delta) = -\mathcal{H}_i(u^k)$$

dove la derivata direzionale di \mathcal{H}_i in u nella direzione u^δ è data da:

$$d\mathcal{H}_i(u, u^\delta) = (1 - \chi_{\mathcal{A}_i^a(u)} - \chi_{\mathcal{A}_i^b(u)}) \gamma_c \int_{\Gamma_c} b_i p^\delta ds - \sigma u_i^\delta$$

dove $p^\delta = \tilde{S}u^\delta$ e χ funzione indicatrice.

Algoritmo metodo di Newton generalizzato con Active sets

Algorithm 1

- 1: Scegliere un valore iniziale u^0 , $k = 0$;
- 2: **repeat**
- 3: Determinare $y^k = \hat{y} + \mathcal{S}u^k$ e $p^k = \hat{p} + \tilde{\mathcal{S}}u^k$, soluzioni dell'equazione di stato e dell'equazione aggiunta.
- 4: Determinare $\mathcal{A}_i^a(u^k)$, $\mathcal{A}_i^b(u^k)$, $\mathcal{I}_i(u^k)$ per $i = 1, \dots, m$, definiti in (7) e (8);
- 5: Calcolare la soluzione $u^\delta \in \mathcal{U}$ di

$$d\mathcal{H}_i(u^k, u^\delta) = -\mathcal{H}_i(u^k), \quad i = 1, \dots, m \quad (9)$$

- 6: $u^{k+1} = u^k + u^\delta$ e $k = k + 1$;
- 7: **until** $\mathcal{A}_i^a(u^k) = \mathcal{A}_i^a(u^{k-1})$ e $\mathcal{A}_i^b(u^k) = \mathcal{A}_i^b(u^{k-1})$ per $i = 1, \dots, m$

Osservazione

Da (9) e dal fatto che $u^{k+1} = u^k + u^\delta$ e $p^{k+1} = p^k + p^\delta$ ricaviamo:

$$\gamma_c \int_{\Gamma_c} b_i p^{k+1} ds - \sigma u_i^{k+1} = 0 \quad \text{in } \mathcal{I}_i(u^k), \quad i = 1, \dots, m, \quad (10a)$$

$$u_i^{k+1} = u_i^a \quad \text{in } \mathcal{A}_i^a(u^k), \quad i = 1, \dots, m, \quad (10b)$$

$$u_i^{k+1} = u_i^b \quad \text{in } \mathcal{A}_i^b(u^k), \quad i = 1, \dots, m, \quad (10c)$$

Possiamo quindi riscrivere l'equazione di stato

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle y^{k+1}(t), \varphi \rangle_H + a(y^{k+1}(t), \varphi) - \gamma_c \sum_{i=1}^m \chi_{\mathcal{I}_i(u^k)}(t) \frac{\gamma_c}{\sigma} \int_{\Gamma_c} b_i p^{k+1}(t) d\tilde{s} \int_{\Gamma_c} b_i \varphi ds \\ = \langle \mathcal{F}(t), \varphi \rangle_{V',V} + \gamma_c \sum_{i=1}^m (\chi_{\mathcal{A}_i^a(u^k)}(t) u_i^a(t) + \chi_{\mathcal{A}_i^b(u^k)}(t) u_i^b(t)) \int_{\Gamma_c} b_i \varphi ds \end{aligned} \quad (11)$$

per tutte le $\varphi \in V$ q.o. in $(0, T]$ e con dato iniziale $y^{k+1}(0) = y_\circ$ e l'equazione aggiunta

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \langle p^{k+1}(t), \varphi \rangle_H + a(t; \varphi, p^{k+1}(t)) + \sigma_Q \langle y^{k+1}(t), \varphi \rangle_H = \sigma_Q \langle y_Q(t), \varphi \rangle_H, \\ p^{k+1}(T) + \sigma_T y^{k+1}(T) = \sigma_T y_T. \end{aligned} \quad (12)$$

come un sistema lineare di due equazioni con incognite y^{k+1} e p^{k+1} :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11}^k & \mathcal{C}_{12}^k \\ \mathcal{C}_{21}^k & \mathcal{C}_{22}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{k+1} \\ p^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1(u^k; u^a, u^b, b_i, \sigma, \gamma_c, y_{out}, y_\circ) \\ \mathcal{Q}_2(u^k; y_Q, y_T, \sigma_Q, \sigma_T) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Primal-Dual Active Set Strategy

Algorithm 2

- 1: Scegliere un valore iniziale $u^0 \in \mathcal{U}$, $k = 0$;
- 2: Determinare $y^0 = \hat{y} + \mathcal{S}u^0$ e $p^0 = \hat{p} + \tilde{\mathcal{S}}u^0$;
- 3: Calcolare $\mathcal{A}_i^a(u^0)$, $\mathcal{A}_i^b(u^0)$, $\mathcal{I}(u^0)$, $i = 1, \dots, m$;
- 4: **repeat**
- 5: Calcolare la soluzione (y^{k+1}, p^{k+1}) del sistema (13);
- 6: Calcolare $u^{k+1} \in \mathcal{U}$ da (10), $k = k + 1$;
- 7: Calcolare $\mathcal{A}_i^a(u^k)$, $\mathcal{A}_i^b(u^k)$, $\mathcal{I}(u^k)$, $i = 1, \dots, m$;
- 8: **until** $\mathcal{A}_i^a(u^k) = \mathcal{A}_i^a(u^{k-1})$ e $\mathcal{A}_i^b(u^k) = \mathcal{A}_i^b(u^{k-1})$ per $i = 1, \dots, m$

Osservazione

La soluzione del sistema (13) può essere calcolata numericamente discretizzando l'equazione di stato e l'equazione aggiunta rispetto allo spazio e al tempo e ottenendo un sistema lineare discreto del tipo:

$$\begin{pmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k \\ C_{21}^k & C_{22}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{k+1} \\ p^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

4 Soluzione Numerica: Metodo degli elementi finiti ed Eulero implicito

1 Il Modello

2 Condizioni necessarie di ottimalità del primo ordine

3 Primal-Dual Active Set Strategy

4 Soluzione Numerica: Metodo degli elementi finiti ed Eulero implicito

5 Test numerici

Il metodo di Galerkin

Consideriamo il seguente problema:

$$a(y, \varphi) = L(\varphi)$$

con $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ed un funzionale lineare L , derivanti per esempio dalla formulazione debole di una EDP. Sia $V_h \subset V$ lo spazio finito dimensionale con base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\} \subset V$, su tale sottospazio possiamo determinare la soluzione (unica) $y_h \in V_h$ tale che:

$$a(y_h, \varphi_h) = L(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h \quad (15)$$

Essendo $y_h \in V_h$ e $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ una base di V_h , esistono coefficienti $\{y_1, \dots, y_N\} \in \mathbb{R}^N$ tali che:

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^N y_i \varphi_i(x)$$

e inoltre, poichè anche ogni $\varphi_h \in V_h$ può essere riscritta come combinazione lineare di elementi della base $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$, calcolare la soluzione di (15) equivale a risolvere il seguente sistema lineare:

$$\sum_{i=1}^N y_i a(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j) \quad \text{per } j = 1, \dots, N \iff Ay = \ell$$

con $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ matrice di elementi $A_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ e $y, \ell \in \mathbb{R}^N$ vettori rispettivamente di componenti y_i e $\ell_i = L(\varphi_i)$ per $i, j = 1, \dots, N$.

A. Quarteroni, *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*, 6a edizione, Springer (2016)

Metodo degli elementi finiti

Sia \mathcal{T} una decomposizione in semplici (e.g. per $d = 2$ in triangoli) del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Sia \mathbb{P}_k l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a k , allora possiamo definire lo spazio degli elementi finiti di grado k come

$$X_h^k = \{ \varphi_h \in C^0(\bar{\Omega}) : \varphi_h|_T \in \mathbb{P}_k, \forall T \in \mathcal{T} \}$$

Dato che ogni funzione $\varphi_h \in X_h^k$ è caratterizzata in modo univoco dai valori che essa assume nei nodi $\{\mathbf{N}_i\}_{i=1}^N$ di \mathcal{T} (e.g. per $d = 2$ e $k = 1$ i vertici dei triangoli), una base di X_h^k è data da $\{\varphi_i\}_{i=1}^N \subset X_h^k$ tali che:

$$\varphi_i(\mathbf{N}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osservazione

Nel nostro problema $V = H^1(\Omega)$, quindi $X_h^k \subset V$ è una buona scelta come spazio per gli elementi finiti. Nel caso di $V = H_0^1(\Omega)$, ad esempio, la scelta ricade invece sullo spazio $\tilde{X}_h^k = \{ \varphi_h \in X_h^k : \varphi_h|_{\partial\Omega} = 0 \}$.

Metodo di Eulero Implicito

Osservazione

L'equazione di stato e l'equazione aggiunta sono però dipendenti dal tempo per cui discretizzandole in spazio con il metodo degli elementi finiti, otteniamo un problema semidiscreto del tipo:

$$\begin{cases} My_t(t) + A(t)y(t) = \ell(t) & t \in (0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (16)$$

dove $A(t)$ e $\ell(t)$ matrice e vettore del sistema lineare derivante dal metodo degli elementi finiti applicato rispettivamente alla forma bilineare $a(t; \cdot, \cdot)$ e al termine noto, e.g. $\langle \mathcal{F}(t) + \gamma_c \mathcal{B}(u(t)), \varphi \rangle_{V^*, V}$ per l'equazione di stato. Inoltre, $y(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t))$ vettore dei coefficienti da determinare e $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ matrice di componenti $M_{i,j} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx$ per $i, j = 1, \dots, N$.

Per risolvere (16) possiamo applicare un qualsiasi metodo numerico per le equazioni differenziali ordinarie, ad esempio il metodo di Eulero Implicito:

$$M(y^{n+1} - y^n) + \Delta t A^{n+1} y^{n+1} = \Delta t \ell^{n+1}$$

dove $\{t_n\}_{n=1}^{N_t}$ è una discretizzazione temporale di passo uniforme $\Delta t > 0$ con $t_1 = 0$ e $t_{N_t} = T$, $A^n := A(t^n)$, $y^n := y(t^n)$ e $\ell^n := \ell(t^n)$ per $n = 1, \dots, N_t$.

Sistema discreto

L'equazione di stato (11) e l'equazione aggiunta (12) discretizzate sono:

$$(M + \Delta t A^{n+1})y^{n+1} - \Delta t \frac{\gamma_c^2}{\sigma} B^* X_{\mathcal{I}}^{n+1} B p^{n+1} = M y^n + \Delta t F^{n+1} + \Delta t \gamma_c B (X_a^{n+1} U^a + X_b^{n+1} U^b)$$

$$y^0 = y_0$$
(17)

$$(M + \Delta t A^{n,*})p^n + \sigma_Q M y^n = M p^{n+1} + \sigma_Q M y_Q^n$$

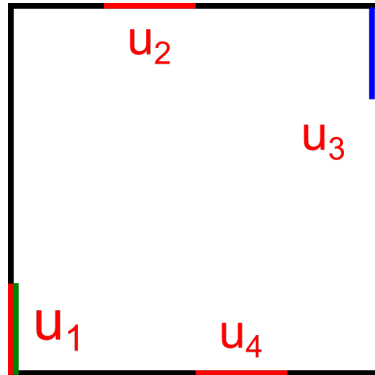
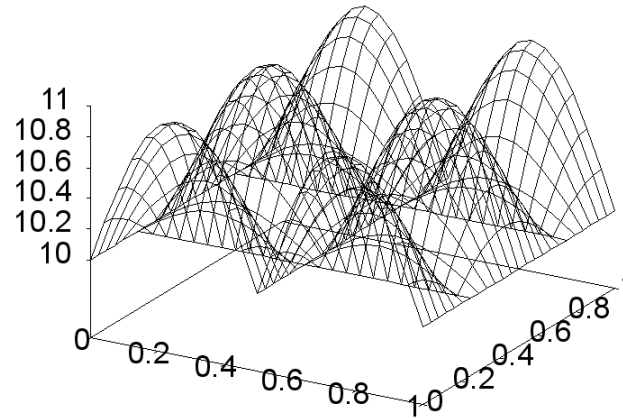
$$p^{N_t} + \sigma_T y^{N_t} = \sigma_T y_T$$
(18)

per $n = 1, \dots, Nt$ e con:

1. $M, A^n \in \mathbb{R}^{N \times N}$ matrici di elementi rispettivamente $A_{ij}^n = a(t^n; \varphi_i, \varphi_j)$ e $M_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx$,
2. $B \in \mathbb{R}^{N \times m}$ di elementi $B_{ij} = \int_{\Gamma_c} b_j \varphi_i ds$,
3. F^n vettori di componenti

$$F_i^n = \langle \mathcal{F}(t^n), \varphi_i \rangle_{V^*, V} = \gamma_0 y_{out}(t^n) \int_{\Gamma_o} \varphi_i ds,$$

4. U^a e U^b vettori di componenti $U_i^a = u_i^a$ e $U_i^b = u_i^b$ e $X_{\mathcal{I}}, X_a, X_b$ matrici diagonali rappresentanti l'azione della funzioni caratteristiche di $\mathcal{I}_i, \mathcal{A}_i^a$ e \mathcal{A}_i^b ad ogni istante di tempo t^n e per ogni $i = 1, \dots, m$.

Test 1: dati(a) Dominio Ω (b) $y_0(\mathbf{x}) = 10 + |\sin(2\pi x_1)\cos(2\pi x_2)|$

$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $T = 1.0$, $m = 4$ controlli,

$$\Gamma_c^1 = \Gamma_{if} = \{x_1 = 0, x_2 \in [0, 0.25]\},$$

$$\Gamma_c^2 = \{x_1 \in [0.25, 0.5], x_2 = 1.0\},$$

$$\Gamma_c^3 = \{x_1 = 1.0, x_2 \in [0.5, 0.75]\},$$

$$\Gamma_c^4 = \{x_1 \in [0.5, 0.75], x_2 = 0\},$$

$$\Gamma_{of} = \{x_1 = 1.0, x_2 \in [0.75, 1.0]\},$$

Griglia 25×25 , $\Delta t = 0.01$,

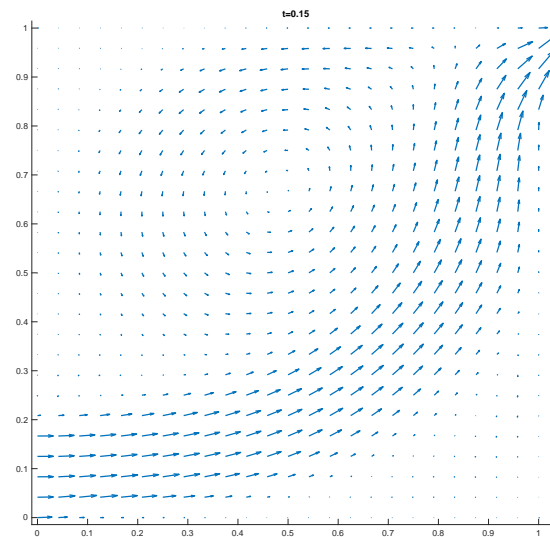
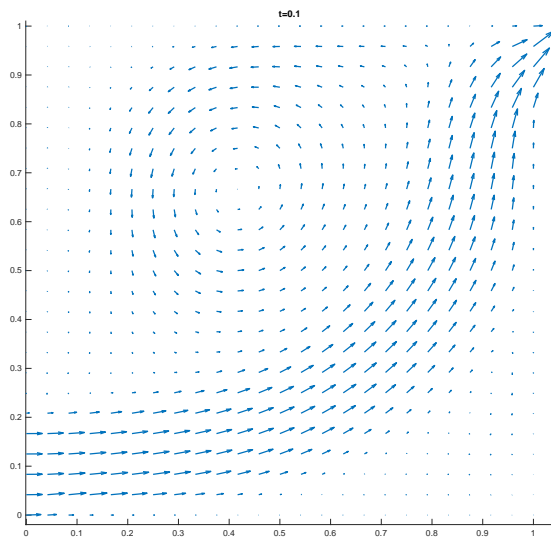
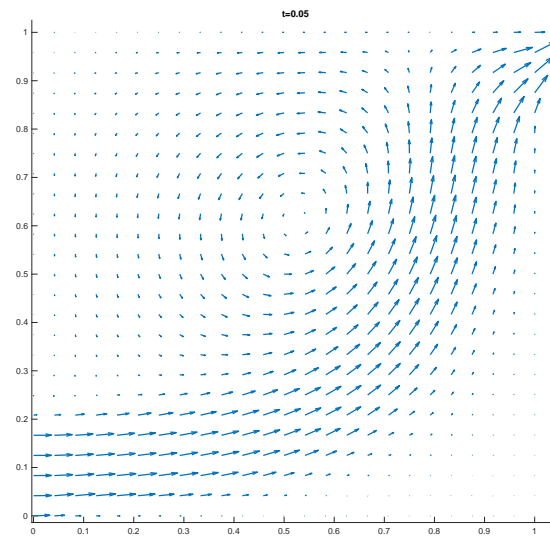
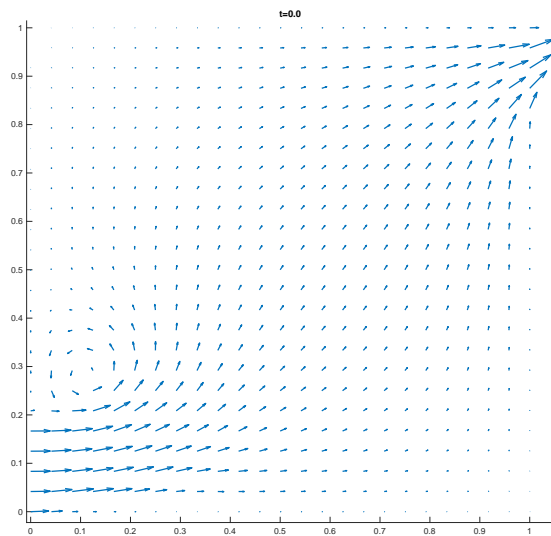
$$\lambda = 1, \gamma_c = 100.0, \gamma_o = 0.1,$$

$$y_Q(t, \mathbf{x}) = \min(18.0 + 2t, 20.0), y_T(\mathbf{x}) = 20.0, \sigma_T = \sigma_Q = 1,$$

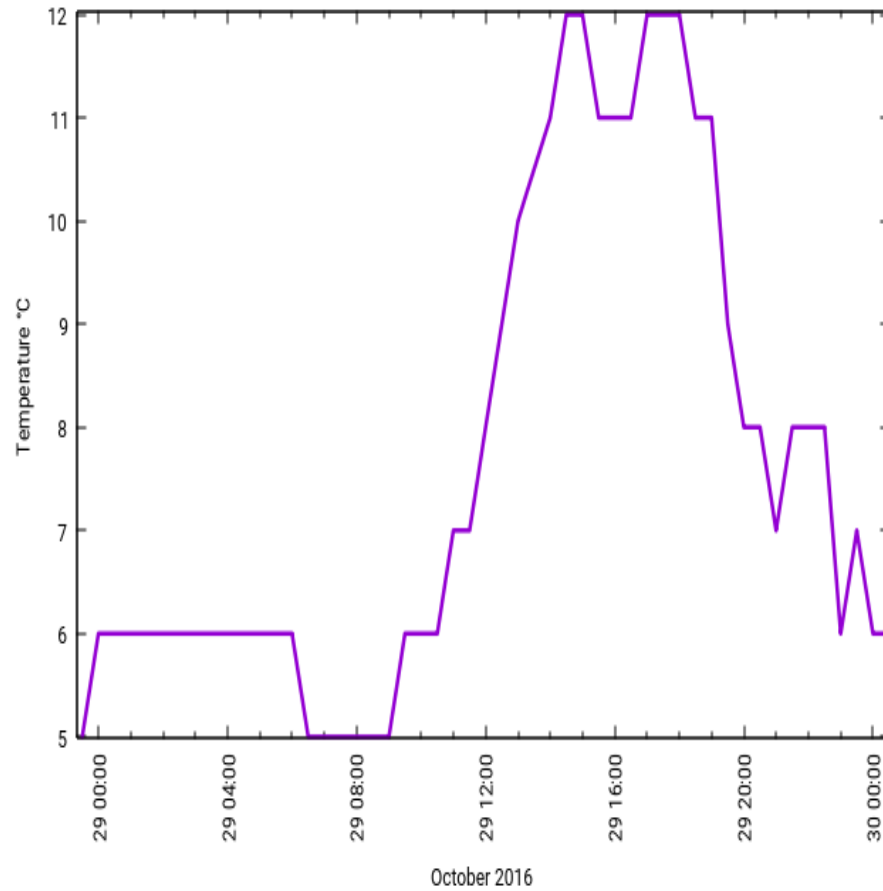
$$u_i^a = 0, u_i^b = 24.0$$

5 Test numerici

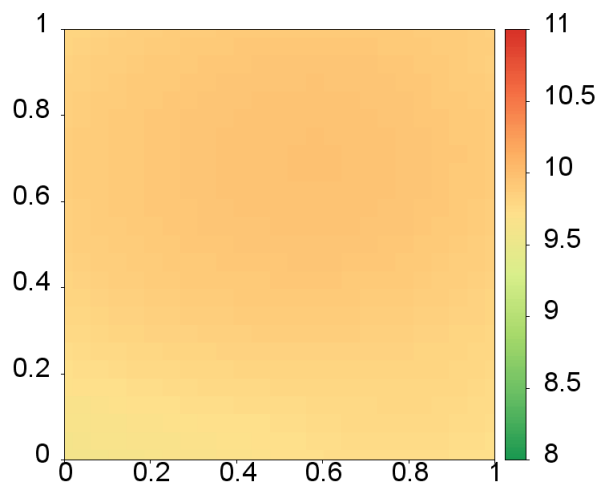
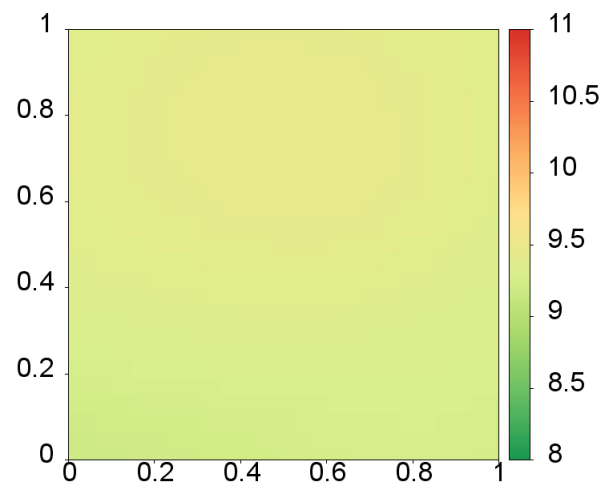
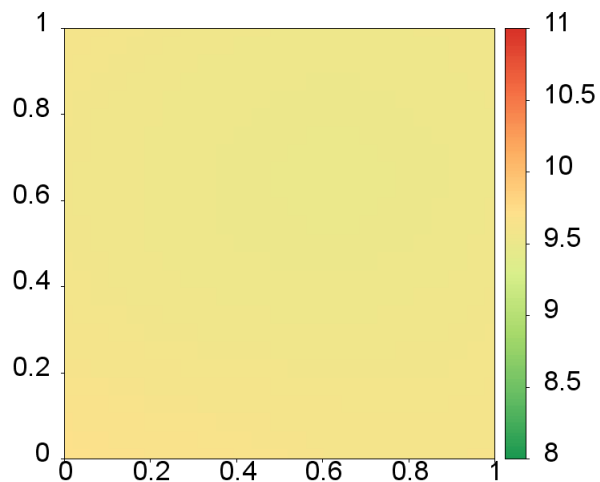
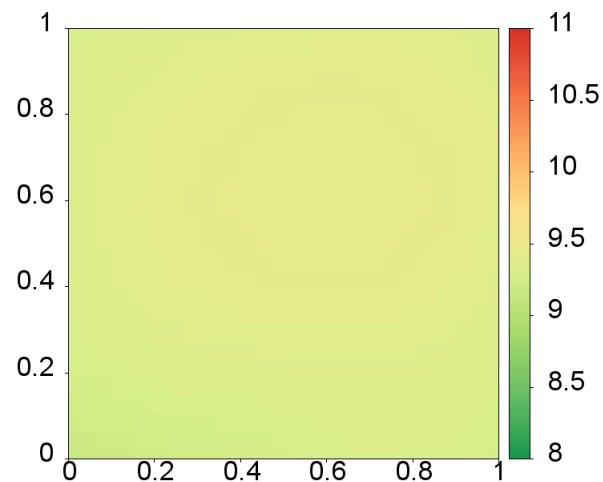
$$v(t, \mathbf{x})$$



Test 1: Temperatura esterna $y_{out}(t)$



Traiettoria non controllata

(g) $t = T/4$ (h) $t = T/2$ (i) $t = 3T/4$ (j) $t = T$

Risultati per diversi σ

$$J(y, u) = \frac{\sigma_Q}{2} \int_0^T \|y(t) - y_Q(t)\|_H^2 dt + \frac{\sigma_T}{2} \|y(T) - y_T\|_H^2 + \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{L^2(0,T)}^2$$

| σ | J | $\text{err}_{\text{rel}}(T)$ | err_{rel} | $\ u\ _{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}$ | $\sum_{i=1}^m \mathcal{A}_i^a \cup \mathcal{A}_i^b $ | Iterazioni |
|----------|--------|------------------------------|---------------------------|---------------------------------|---|------------|
| 1.0 | 144.47 | 0.3982 | 0.4232 | 6.045 | 0 | 1 |
| 0.1 | 25.48 | 0.0680 | 0.0723 | 14.536 | 0 | 1 |
| 0.01 | 2.75 | 0.0082 | 0.0087 | 19.123 | 18 | 3 |
| 0.001 | 0.80 | 0.0037 | 0.0040 | 19.924 | 26 | 4 |

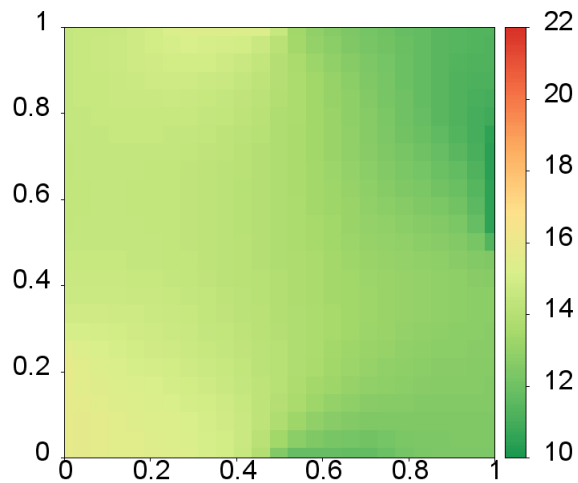
dove:

$$\text{err}_{\text{rel}}(T) = \frac{\|y(T) - y_T\|_H}{\|y_T\|_H}$$

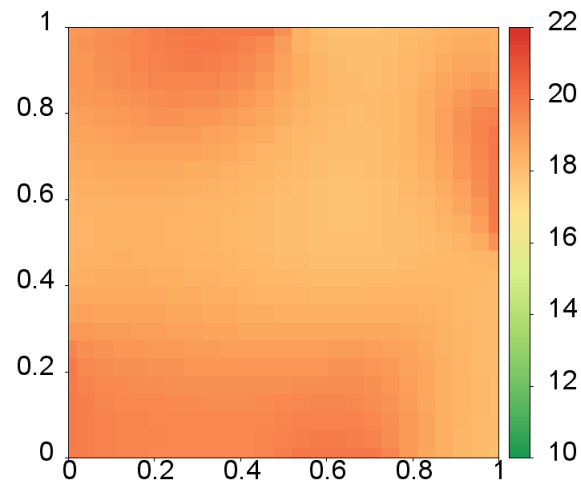
$$\text{err}_{\text{rel}} = \frac{\|y - y_Q\|_{L^2(0,T;H)}}{\|y_Q\|_{L^2(0,T;H)}}$$

5 Test numerici

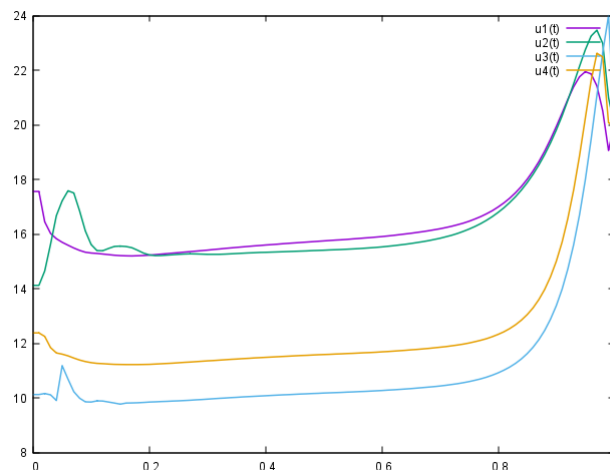
$$\sigma = 0.1$$



(a) $t = T/2$



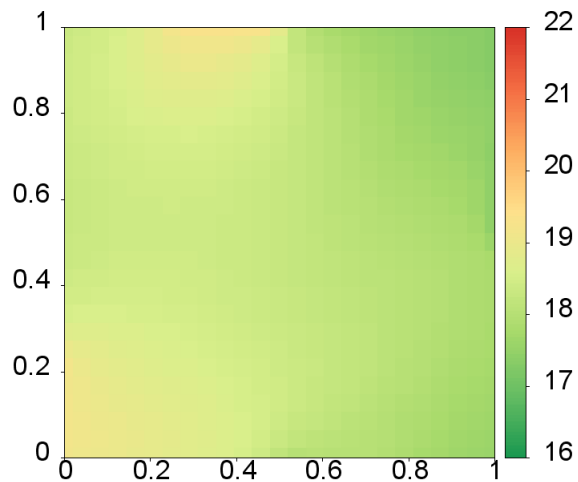
(b) $t = T$



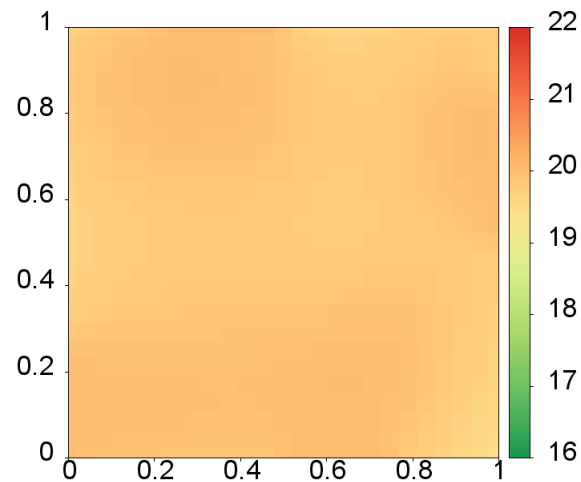
(c) Controllo ottimo u

5 Test numerici

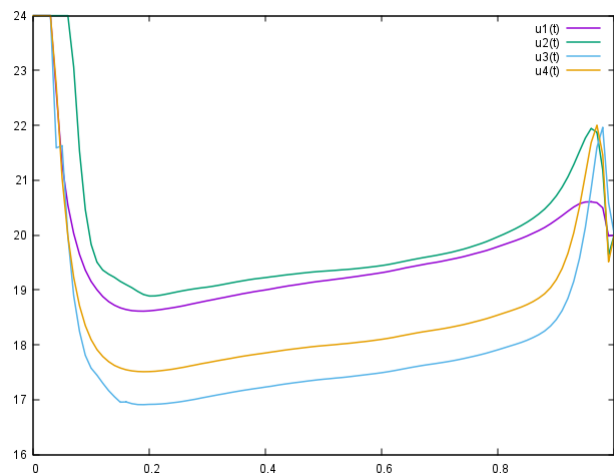
$$\sigma = 0.01$$



(a) $t = T/2$



(b) $t = T$



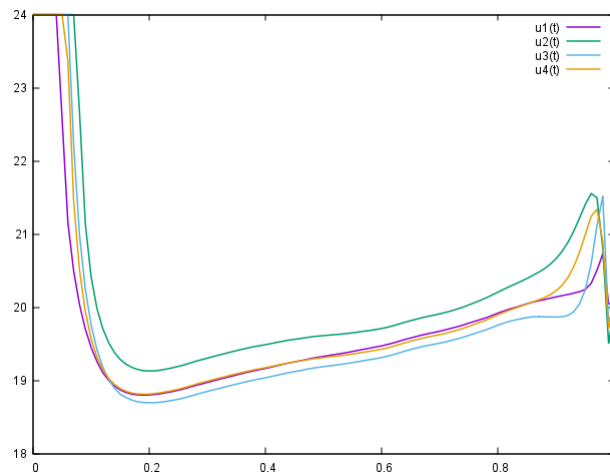
(c) Controllo ottimo u

Il caso $\sigma = 0.001$

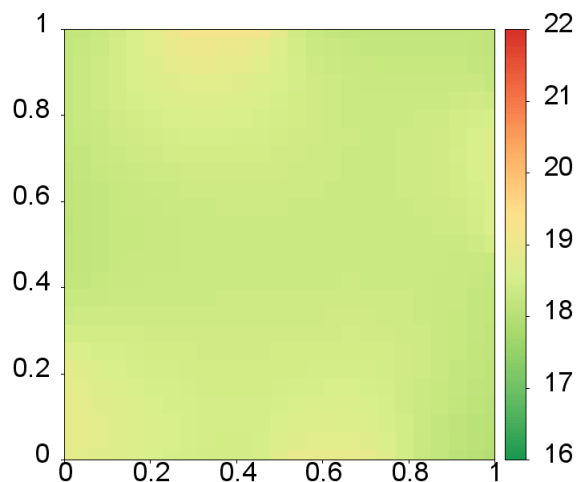
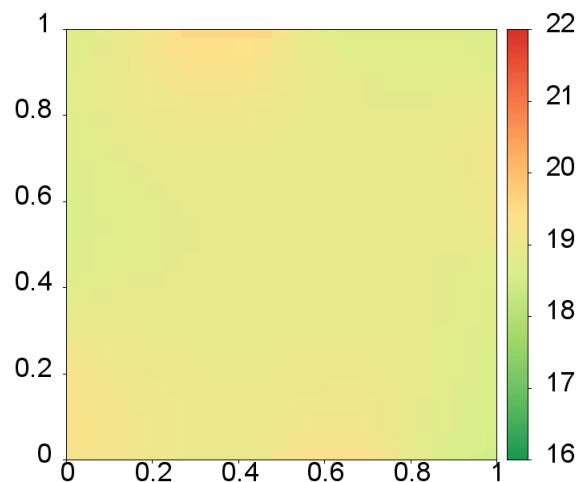
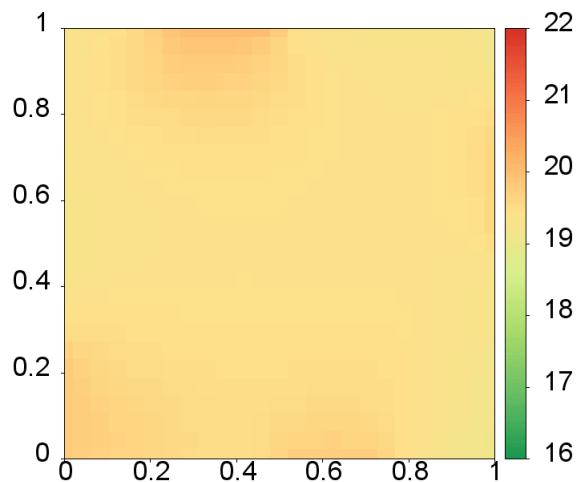
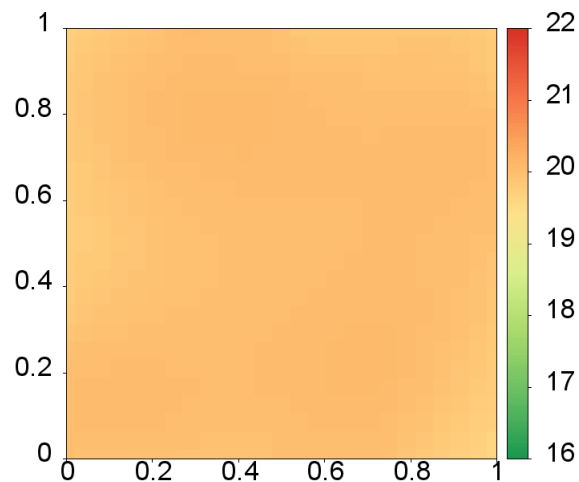
| Iterazione | J | $\ y(T) - y_T\ _H$ | $\ y - y_Q\ _{L^2(0,T;H)}$ | $\ u\ _{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}$ | $\sum_{i=1}^m \mathcal{A}_i^a \cup \mathcal{A}_i^b $ |
|------------|--------|--------------------|----------------------------|---------------------------------|---|
| 1 | 0.8457 | 0.075926 | 1.137867 | 19.771038 | 16 |
| 2 | 0.8052 | 0.075896 | 1.100082 | 19.861002 | 22 |
| 3 | 0.7993 | 0.075884 | 1.094163 | 19.890926 | 26 |
| 4 | 0.7985 | 0.075880 | 1.093283 | 19.923976 | 26 |

dove:

$$\|u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}^2 = \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{L^2(0,T)}^2$$

Figure: Controllo ottimo u

Traiettoria ottimale per $\sigma = 0.001$

(a) $t = T/4$ (b) $t = T/2$ (c) $t = 3T/4$ (d) $t = T$

Conclusioni e prospettive








Possiamo concludere che:

1. Il problema di controllo ottimo relativo al modello presentato ammette soluzione unica.
2. La Primal-Dual Active Set Strategy permette di calcolare la soluzione del problema risolvendo reiteratamente un sistema lineare derivante dall'accoppiamento dell'*equazione di stato (primale)* e dell'*equazione aggiunta (duale)*.
3. La Primal-Dual Active Set Strategy è equivalente ad un metodo di Newton generalizzato, per cui ha ordine di convergenza superlineare.








Alcuni possibili sviluppi:

1. Vincoli sulle variabili di stato,
2. Riduzione del costo di calcolo della soluzione: tecniche di riduzione di modello (Proper Orthogonal Decomposition, Reduce Basis, Balanced Truncation, ...) o di risoluzione in parallelo in sotto-domini (Domain Decomposition),
3. Ricercare soluzioni Pareto ottimali (Multi Objective optimization, ...)
4. Soluzione del problema con orizzonte temporale T infinito (Model Predictive Control, ...).

Bibliografia

-  [L.C. Evans](#)
Partial Differential Equations
American Math. Society, Graduate Studies in Mathematics, volume 19, 1998.
-  [M. Hintermüller, K. Ito, K. Kunisch.](#)
The Primal-Dual Active Set Strategy as a Semismooth Newton Method.
SIAM Journal of Optimization, 13:865-888, 2002.
-  [M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich.](#)
Optimization with PDE constraints
Springer, 2009.
-  [K.Kunisch, A. Rösch,](#)
Primal-Dual Active Set Strategy for a General Class of Constrained Optimal Control Problems
SIAM J. Optim., 13 (2): 321–334, 2002.
-  [L. Mechelli, S. Volkwein.](#)
POD-Based Economic Optimal Control of Heat-Convection Phenomena
submitted 2018.
-  [A. Quarteroni,](#)
Modellistica Numerica per Problemi Differenziali, 6a edizione
Springer, 2016.
-  [F. Tröltzsch.](#)
Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications.
American Math. Society, Graduate Studies in Mathematics, volume 112, 2010.

Bibliografia

-  [L.C. Evans](#)
Partial Differential Equations
American Math. Society, Graduate Studies in Mathematics, volume 19, 1998.
-  [M. Hintermüller, K. Ito, K. Kunisch.](#)
The Primal-Dual Active Set Strategy as a Semismooth Newton Method.
SIAM Journal of Optimization, 13:865-888, 2002.
-  [M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich.](#)
Optimization with PDE constraints
Springer, 2009.
-  [K.Kunisch, A. Rösch,](#)
Primal-Dual Active Set Strategy for a General Class of Constrained Optimal Control Problems
SIAM J. Optim., 13 (2): 321–334, 2002.
-  [L. Mechelli, S. Volkwein.](#)
POD-Based Economic Optimal Control of Heat-Convection Phenomena
submitted 2018.
-  [A. Quarteroni,](#)
Modellistica Numerica per Problemi Differenziali, 6a edizione
Springer, 2016.
-  [F. Tröltzsch.](#)
Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications.
American Math. Society, Graduate Studies in Mathematics, volume 112, 2010.

Grazie per l'attenzione!!